Lösungsmethode für Extremwertprobleme

Anhand eines Beispieles soll die Vorgehensweise dargestellt werden.

Aus einem Baumstamm mit kreisrundem Querschnitt und einem Durchmesser von 0,25m soll ein Balken mit rechteckigem Querschnitt und größter Tragfähigkeit herausgeschnitten werden.
Welche Maße hat das Rechteck?

1. Extremalbedingung

Es werden alle wichtigen Größen benannt. Man gibt eine Funktion für die Größe an, zu der ein Extremum bestimmt werden soll. Diese Extremalgröße hängt in der Regel von mehreren Variablen ab.

Sei b die Breite und h die Höhe des Rechteckes so gilt für die Fläche A des Rechteckes:

$$A = bh$$

Die Tragfähigkeit eines quaderförmigen Holzbalkens wird durch die Funktion:

$$t:\ \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad (b,h)\to\frac{1}{6}bh^2$$

$$mit\,der\,Funktionsgleichung\quad t(b,h)=\frac{1}{6}bh^2$$

wiedergegeben.

2. Nebenbedingung

Es wird eine Gleichung erstellt, die angibt wie die Variablen voneinander abhängen.

$$d^2 = h^2 + b^2 \qquad\qquad 25^2 = h^2 + b^2$$

3. Zielfunktion

Die Variablen in der Extremalbedingung werden durch die Nebenbedingung so ersetzt, daß die Zielfunktion nur von einer Variablen abhängig ist.

Mit der Nebenbedingung gilt für die Höhe des Holzbalkens $h^2 = d^2 - b^2$, womit sich folgende Zielfunktion ergibt

$$t:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad b\to\frac{1}{6}b(d^2-b^2) \qquad\qquad t:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R};\quad b\to\frac{1}{6}b(25^2-b^2)$$

$$mit\,der\,Funktionsgleichung \qquad\qquad mit\,der\,Funktionsgleichung$$

$$t(b)=\frac{1}{6}b(d^2-b^2)=\frac{1}{6}bd^2-\frac{1}{6}b^3 \qquad\qquad t(b)=\frac{1}{6}b(25^2-b^2)=\frac{1}{6}b\,25^2-\frac{1}{6}b^3$$

Diese Zielfunktion wird auf Extrema hin untersucht.

4. Extremwerte bestimmen

Die Extremwerte bestimmt man indem die erste Ableitung der Zielfunktion gleich Null gesetzt wird.

$$t'(b) = \frac{1}{6}d^2 - \frac{1}{2}b^2$$
$$0 = \frac{1}{6}d^2 - \frac{1}{2}b^2$$
$$\frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{6}d^2$$
$$b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$$

$$t'(b) = \frac{1}{6}25^2 - \frac{1}{2}b^2$$
$$0 = \frac{1}{6}25^2 - \frac{1}{2}b^2$$
$$\frac{1}{2}b^2 = \frac{1}{6}25^2$$
$$b = \sqrt{\frac{1}{3}}25$$

Um zwischen Maximum und Minimum zu unterscheiden, muß berechnet werden, ob der Wert der zweiten Ableitung der Zielfunktion an der Stelle b kleiner bzw. größer als Null ist.

Ist $b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$ wirklich ein Maximum?

Die zweite Ableitung der Zielfunktion hat folgende Gestalt:

$$t''(b) = -b < 0$$

Es handelt sich also um ein Maximum, da b eine positive Zahl ist.

5. Bezug der berechneten Werte zur Aufgabe

Es werden die Werte aller gesuchten Größen angegeben.

Mit der Breite $b = \sqrt{\frac{1}{3}}d$ folgt aus der Nebenbedingung für die Höhe des Holzbalkens

$$h^2 = d^2 - \frac{1}{3}d^2$$
$$h^2 = \frac{2}{3}d^2$$
$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}d$$

$$h^2 = 25^2 - \frac{1}{3}25^2$$
$$h^2 = \frac{2}{3}25^2$$
$$h = \sqrt{\frac{2}{3}}25$$